Attraction « Space Mountain »

Analyse fonctionnelle et structurelle de la catapulte (13 min)

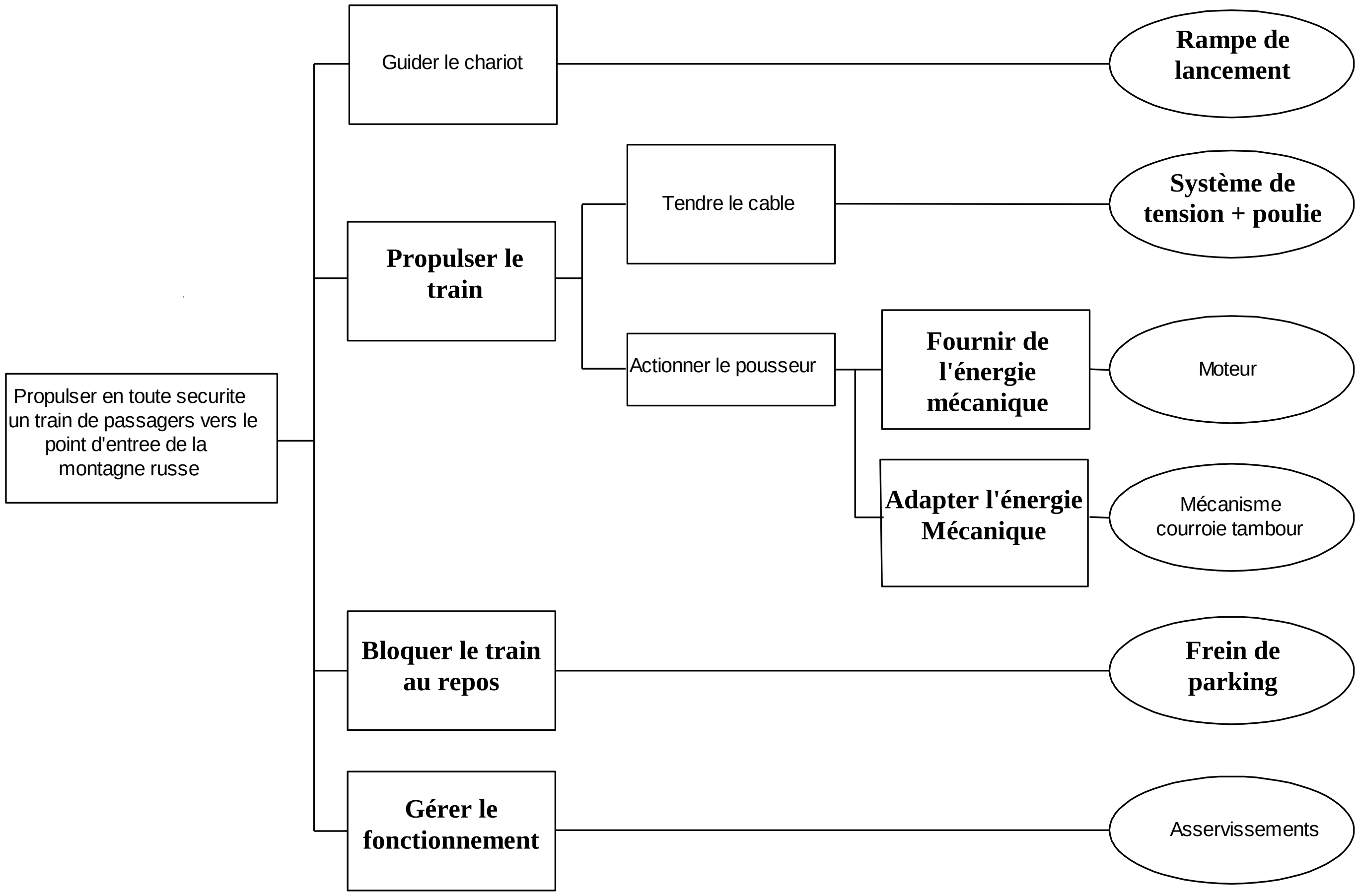
Q1/ Donner le contexte d'utilisation de ce système (ex : aéronautique, hifi,…)

Grand public, fabrication unitaire; haut niveau de sécurité; utilisation en intérieur

Q2/ Dans la phase de conception d'une telle attraction, une fonction est primordiale, laquelle ?

Sécurité des utilisateurs

Q3/ Compléter le diagramme F.A.S.T. sur le document réponse n°1.



Etude de l’asservissement de la motorisation de la catapulte

Etude préliminaire : Moteur à courant continu (15 min)

Q4/ Appliquer les transformées de Laplace aux équations précédente. Vous ferez les hypothèses nécessaires.

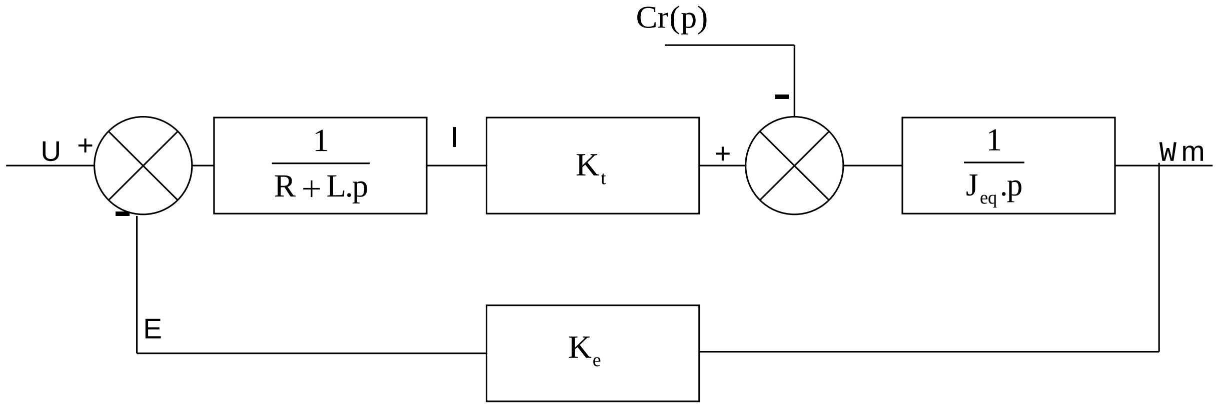
$$u(t) = r.i(t) + L\frac{di(t)}{dt} + e(t) \rightarrow U(p) = r.I(p) + L.p.I(p) + E(p)$$

$$J_{eq}\frac{d\omega_m(t)}{dt} = C_m(t) - C_r(t) \rightarrow J_{eq}.\Omega_m(p) = C_m(p) - C_r(p)$$

$$C_m(t) = K_t i(t) \rightarrow C_m(p) = K_t I(p)$$

$$e(t) = K_e\omega_m(t) \rightarrow E(p) = K_e.\Omega_m(p)$$

Q5/ Compléter le schéma bloc sur le document réponse n°2:



Q6/ Déterminer la fonction de transfert $H_1(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U(p)}$ en la mettant sous la forme canonique (on supposera Cr(p) nul pour cette question).

$$H_1(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U(p)} = \frac{K_t}{(R+Lp)J_{eq}p + K_eK_t} = \frac{1/K_e}{1 + \frac{RJ_{eq}}{K_eK_t}p + \frac{LJ_{eq}}{K_eK_t}p^2}$$

Q7/ Déterminer la fonction de transfert $G_1(p) = \frac{\Omega_m(p)}{C_r(p)}$ en la mettant sous la forme canonique (on supposera U(p) nul pour cette question).

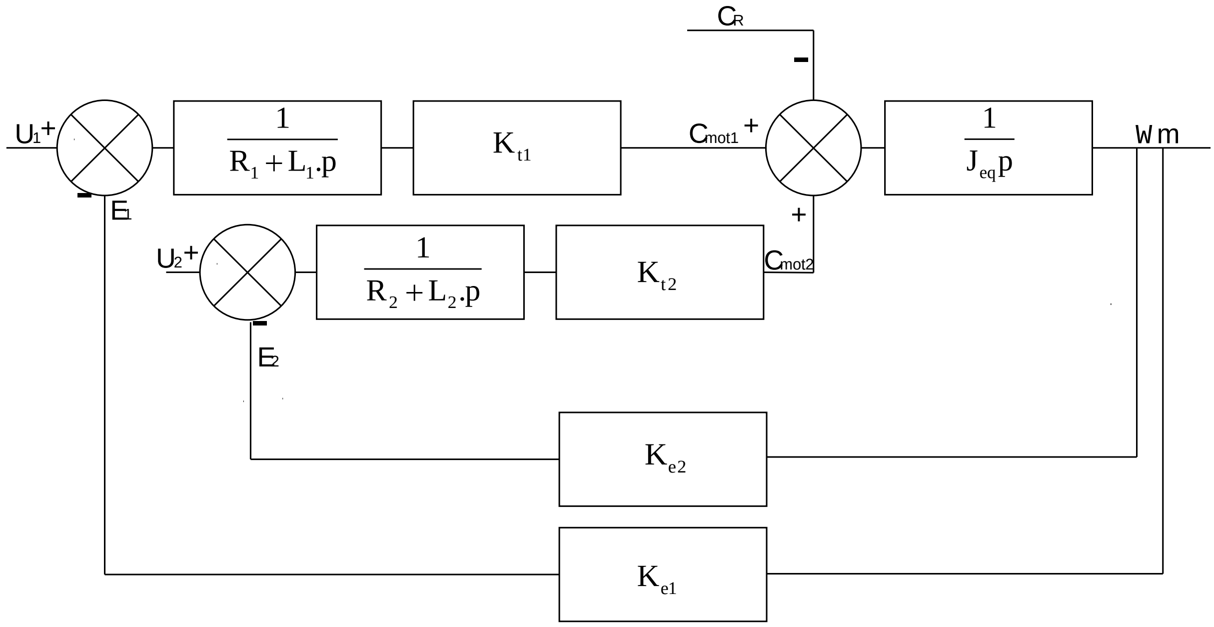
$$G_1(p) = \frac{\Omega_m(p)}{C_r(p)} = \frac{-(R+Lp)}{(R+Lp)J_{eq} + K_eK_t} = \frac{-\frac{R}{K_eK_t}(1+\frac{L}{R}p)}{1 + \frac{RJ_{eq}}{K_eK_t}p + \frac{LJ_{eq}}{K_eK_t}p^2}$$

Q8/ En déduire Ωm(p) en fonction de U(p), Cr(p), H1(p) et G1(p).

$$\Omega_m(p) = H_1(p).U(p) + G_1(p).C_r(p)$$

Modélisation de la motorisation (42min)

Q9/ Par analogie avec la partie précédente, compléter le schéma bloc sur le document réponse n°2 :



Q10/ Montrer que la fonction de transfert peut s'écrire sous la forme :

$$\Omega(p)=H_1(p).U_1(p)+H_2(p).U_2(p)-H_3(p).C_r(p)$$

avec $H_1(p)=\dfrac{K_{t1}(R_2+L_2p)}{D(p)}; H_2(p)=\dfrac{K_{t2}(R_1+L_1p)}{D(p)};\ H_3(p)=\dfrac{(R_1+L_1p)(R_2+L_2p)}{D(p)};$

et où $D(p)=J_{eq}(R_1+L_1p).(R_2+L_2p).(p)+K_{e1}K_{t1}(R_2+L_2p)+K_{e2}K_{t2}(R_1+L_1p)$

$$\Omega(p)=\frac{1}{J_{eq}p}\left\{-C_r(p)+\frac{K_{t1}}{R_1+L_1p}\ U_1(p)-K_{e1}\Omega_m(p)\ +\frac{K_{t2}}{R_2+L_2p}\ U_2(p)-K_{e2}\Omega_m(p)\ \right\}$$

$$\Omega(p)\left\{1+\frac{1}{J_{eq}p}\frac{K_{t1}K_{e1}(R_2+L_2p)}{(R_1+L_1p)(R_2+L_2p)}+\frac{1}{J_{eq}p}\frac{K_{t2}K_{e2}(R_1+L_1p)}{(R_1+L_1p)(R_2+L_2p)}\right\}=\frac{1}{J_{eq}p}\frac{K_{t1}}{R_1+L_1p}U_1(p)+\frac{1}{J_{eq}p}\frac{K_{t2}}{R_2+L_2p}U_2(p)-\frac{C_r(p)}{J_{eq}p}$$

$$\Omega(p)=\underbrace{\frac{K_{t1}(R_2+L_2p)}{D(p)}}_{H_1(p)}U_1(p)+\underbrace{\frac{K_{t2}(R_1+L_1p)}{D(p)}}_{H_2(p)}U_2(p)-\underbrace{\frac{(R_1+L_1p)(R_2+L_2p)}{D(p)}}_{H_3(p)}C_r(p)$$

avec $D(p)=J_{eq}(R_1+L_1p).(R_2+L_2p).(p)+K_{e1}K_{t1}(R_2+L_2p)+K_{e2}K_{t2}(R_1+L_1p)$

Q11/ Montrer que la relation de transfert se simplifie.

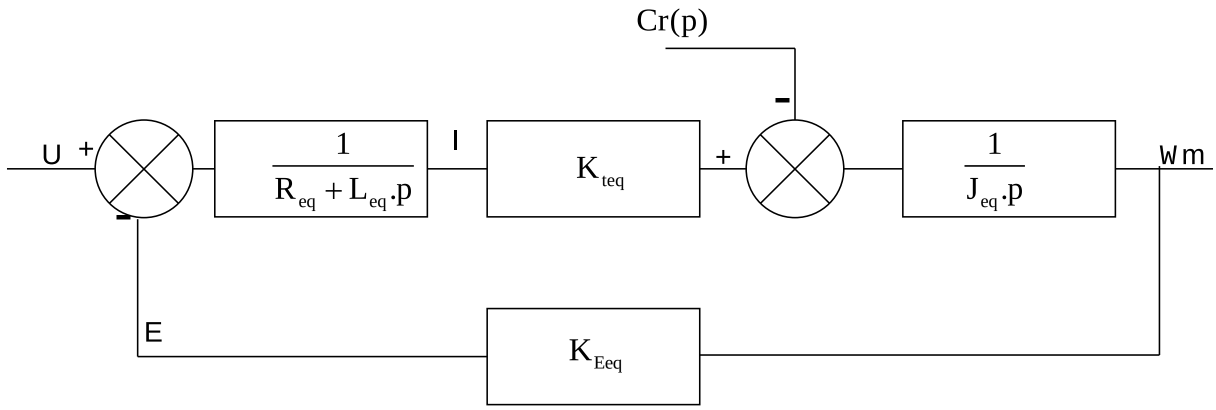
On donne
- $K_{e1}=K_{e2}=22$ V/rd/s
- $K_{t1}=K_{t2}=22$ mN/A
- $R_1=R_2=0.03\ \Omega$
- $L_1=L_2=7.2\ 10^{-4}$ H
- $U_{1max}=U_{2max}=700V \rightarrow U_1(p)=U_2(p)$
- J_{eq}=3600kg.m^2

$$\Omega(p)=2\frac{K_{t1}}{J_{eq}(R_1+L_1p).p+2K_{t1}K_{e1}}U_1(p)-\frac{(R_1+L_1p)}{J_{eq}(R_1+L_1p).p+2K_{t1}K_{e1}}C_r(p)$$

Q12/ En comparant cette fonction de transfert avec celle trouvée à la question 6 (fonction de transfert d'un moteur à courant continu seul), montrer que cette motorisation est équivalente à un monteur unique dont on précisera les paramètres K_{Eeq}, K_{teq}, R_{eq}, L_{eq}

$K_{Eeq} = 2\ K_{e1}$; $K_{teq} = K_{t1}$; $R_{eq} = R_{1;}$ $L_{eq} = L_1$

Q13/ Tracer le schéma bloc avec K_{Eeq}, K_{teq}, R_{eq}, L_{eq}



Q14/ Mettre la relation de transfert sous la forme canonique suivante et donner les expressions littérales et numériques des différents paramètres

$$\Omega = \underbrace{\frac{K_U}{1+\frac{2\xi}{\omega_0}p+\frac{1}{\omega_0^{\ 2}}p^2}}_{H_2(p)} U - \underbrace{\frac{K_{C_R}(1+Tp)}{1+\frac{2\xi}{\omega_0}p+\frac{1}{\omega_0^{\ 2}}p^2}}_{G_2(p)} C_R$$

$$H_2(p) = 2\frac{K_{t1}}{J_{eq}(R_1 + L_1 p).p + 2K_{t1}K_{e1}} = \frac{1/K_{e1}}{1+\frac{J_{eq}R_1}{2K_{t1}K_{e1}}p + \frac{J_{eq}L_1}{2K_{t1}K_{e1}}p^2}$$

$$K_u = 1/K_{e1} = 0.04\ \mathrm{rd/s/V}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2K_{t1}K_{e1}}{J_{eq}L_1}} = 19.3\ \mathrm{s}^{-1}$$

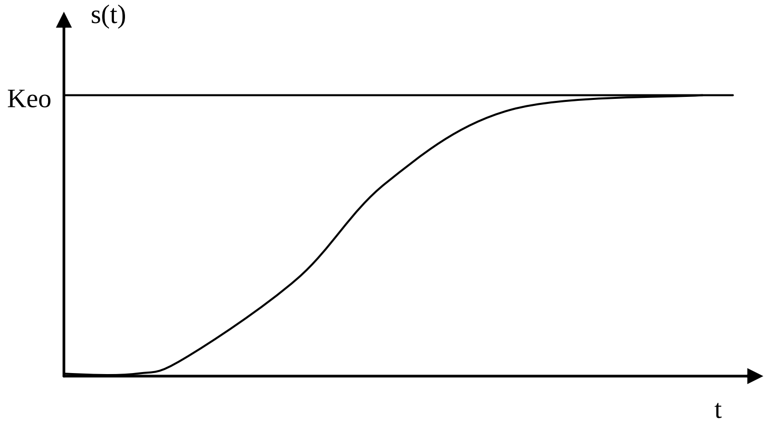
$$\frac{2\xi}{\omega_0} = \frac{J_{eq}R_1}{2K_{t1}K_{e1}} \Leftrightarrow \xi = \frac{1}{2}\frac{J_{eq}R_1}{\sqrt{2K_{t1}K_{e1}}\sqrt{J_{eq}R_1}} = 1.08$$

$$G_2(p) = \frac{(R_1 + L_1 p)}{J_{eq}(R_1 + L_1 p).p + 2K_{t1}K_{e1}} = \frac{\frac{R_1}{2K_{t1}K_{e1}}(1+\frac{L_1}{R_1})}{1+\frac{J_{eq}R_1}{2K_{t1}K_{e1}}p + \frac{J_{eq}L_1}{2K_{t1}K_{e1}}p^2}$$

$$K_{CR} = \frac{R_1}{2K_{t1}K_{e1}} = 3{,}1.10^{-5}\ \mathrm{(rd/s)/(N.m)}$$

$$T = \frac{L_1}{R_1} = 0{,}025\ \mathrm{s}$$

Q15/ Donner l'allure de la courbe et définir le type de régime en prenant C_R=0



Performances de la commande en boucle ouverte. (15min)

Q16/ Calculer la vitesse de rotation limite théorique ω∞, effectuer l'application numérique, commenter vis-à-vis du cahier des charges.

a. En négligeant le couple de frottement C_R

$$C_R(p)=0$$

$$\Omega(p)=H_1(p).U(p) \text{ avec } U(p)=\frac{U_{max}}{p} \qquad C_R(p)=0$$

$$\lim_{t\to\infty}\omega(t)=\lim_{p\to 0}p\Omega(p)=K_u.U_{max}=31{,}8\ rd/s$$

b. En modélisant le couple de frottement par un échelon CR(t)=22200 Nm

$$\lim_{t\to\infty}\omega(t)=\lim_{p\to 0}p\Omega(p)=\lim_{p\to 0}p\left\{H_2(p).\frac{U_{max}}{p}-G_2(p).\frac{C_{r\,max}}{p}\right\}=K_U.U_{max}-K_{C1}.C_{r\,max}$$

$$\lim_{t\to\infty}\omega(t)=31{,}13\ rd/s$$

Q17/ Calculer le temps de réponse à 5 %, TR

$$\xi\approx 1\ ;\ Tr.\omega_0=5\ ;\ Tr=\frac{5}{\omega_0}=0.26\ s$$

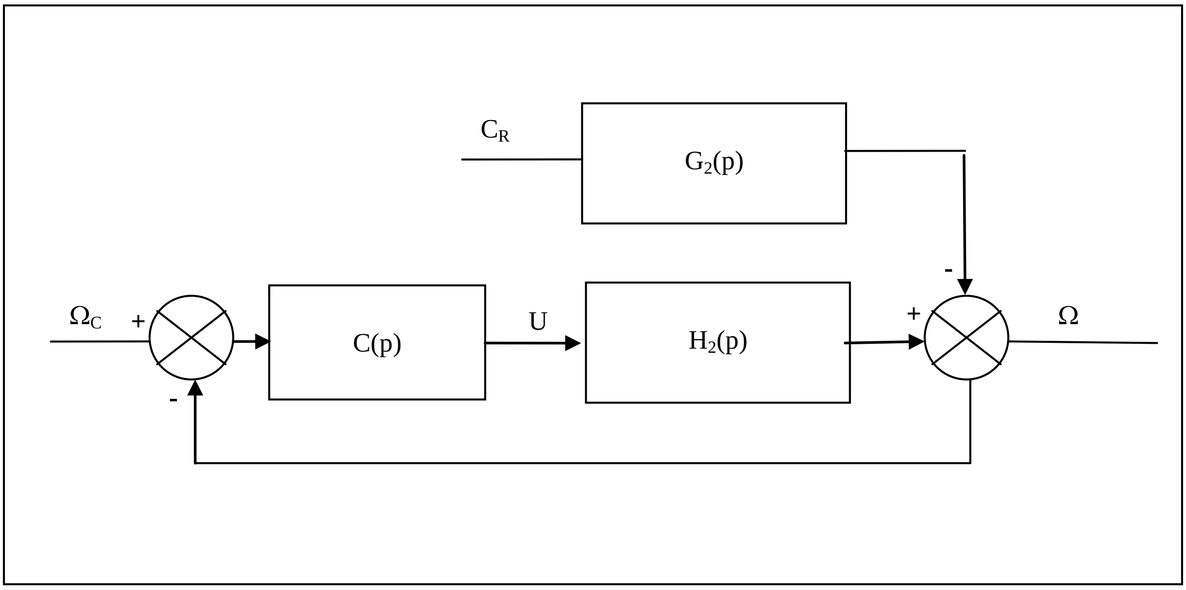
Q18/ En déduire la valeur de l'accélération angulaire moyenne afin d'atteindre la vitesse maxi. Commenter vis-à-vis du cahier des charges

$$\dot{\omega}=\frac{\omega_\infty}{Tr}=120\ rd/s^2$$

L'accélération angulaire est largement supérieure à l'accélération maximale autorisée

Commande asservie en vitesse du pousseur

Q19/ Compléter le schéma fonctionnel sur le document réponse n°2 en faisant apparaître $H_2(p)$ et $G_2(p)$:



Q20/ Donner la relation de transfert : $\Omega=f(\Omega_C, C_R)$ en fonction de $H_2(p)$ et $G_2(p)$:

$$\Omega(p) = -G_2(p).Cr(p) + H_2(p).C(p).\ \ \Omega_c(p) - \Omega(p)$$

$$\Omega(p) = \frac{H_2(p).C(p)}{1+H_2(p).C(p)}\Omega_c(p) - \frac{G_2(p)}{1+H_2(p).C(p)}C_r(p)$$

Correcteur à action proportionnelle $C(p) = K_i$

Q21/ Donner l'expression littérale de la précision pour un échelon d'amplitude Ω_{C0} en entrée.

$$\Omega_c(p) = \frac{\Omega_{c0}}{p}$$

a. En négligeant le couple résistant

$$\lim_{t\to\infty}\omega(t) = \lim_{p\to 0} p\Omega(p) = \frac{K_U K_I}{1+K_U K_I}.\Omega_{c0}$$

b. En prenant en compte le couple résistant par un échelon d'amplitude $C_{R0.}$

$$\lim_{t\to\infty}\omega(t) = \lim_{p\to 0} p\Omega(p) = \frac{K_U K_I}{1+K_U K_I}.\Omega_{c0} - \frac{K_{C1}}{1+K_U K_I}.C_{R0}$$

c. Conclure sur la précision et la sensibilité aux pertes du système.

La précision dépend de la valeur de Ki. Elle est sensible aux perturbations

Correcteur à action proportionnelle et intégrale $C(p)=\dfrac{K_i(1+T_i p)}{T_i p}$

Q22/ Donner l'expression littérale de la précision pour un échelon d'amplitude Ω_{C0} en entrée.

a. En négligeant le couple résistant

$$\lim_{t\to\infty}\omega(t)=\lim_{p\to 0}p\Omega(p)=\lim_{p\to 0}\frac{\dfrac{K_U K_I}{Ti.p}}{1+\dfrac{K_U K_I}{Ti.p}}.\Omega_{c0}\approx\Omega_{c0}$$

b. En prenant en compte le couple résistant par un échelon d'amplitude C_{R0}.

$$\lim_{t\to\infty}\omega(t)=\lim_{p\to 0}p\Omega(p)=\lim_{p\to 0}\frac{K_U K_I}{Ti.p+K_U K_I}.\Omega_{c0}-\underbrace{\frac{K_{Cr}.Ti.p}{Ti.p+K_U K_I}}_{0}.C_{R0}\approx\Omega_{c0}$$

c. Conclure sur la précision et la sensibilité aux pertes du système.

La précision est insensible aux perturbations